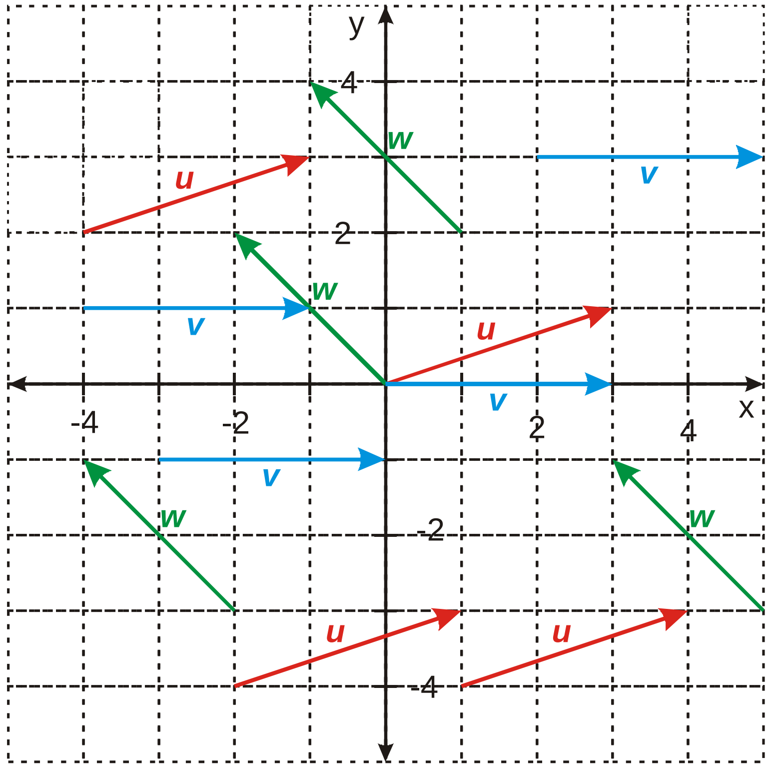
7.2.3 Násobení vektoru číslem I

Předpoklady: 7201

Př. 1: Zakresli do soustavy souřadnic alespoň dvě různá umístění vektorů:
a) $\boldsymbol{u}=(3;1)$ b) $\boldsymbol{v}=(3;0)$ c) $\boldsymbol{w}=(-2;2)$



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Je nutné u studentů neustále kontrolovat, zda mají představu vektoru jako množiny šipek s danou velikostí a směrem.

Všechny orientované úsečky, které jsou umístěním vektoru, mají stejnou velikost $\Rightarrow$ má smysl mluvit o velikosti vektoru.
Zřejmě je velikost vektoru ***u*** (značíme $|\boldsymbol{u}|$) rovna délce libovolné orientované úsečky ***AB***, která je jeho umístěním: $|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{AB}|$.
Jestliže $|\boldsymbol{u}|=1$ říkáme, že vektor ***u*** je **jednotkový**.

Pedagogická poznámka: Pokud zadáte žákům na tabuli konkrétní vektor a necháte je určit jeho velikost, skoro všichni uspějí a pak odvodí i obecný vzorec.

Jak spočítáme velikost vektoru?
Umíme spočítat vzdálenost dvou bodů $\Rightarrow$ vezmeme krajní body libovolného umístění ***AB*** vektoru ***u*****:** $A[a_1;a_2;a_3]$, $B[b_1;b_2;b_3]$ a určíme jejich vzdálenost.

Velikost orientované úsečky ***AB***: $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}=|\boldsymbol{u}|$.

Rádi bychom počítali velikost vektoru z jeho souřadnic, platí: $b_1 - a_1 = u_1$, $b_2 - a_2 = u_2$, $b_3 - a_3 = u_3 \Rightarrow |\boldsymbol{u}| = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ platí $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.
Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ platí $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Př. 2: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = \left(2; -\sqrt{5}\right)$. Urči $|\boldsymbol{u}|$.

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Př. 3: Je dán vektor $\boldsymbol{v} = (1; -2; 3)$. Urči $|\boldsymbol{v}|$.

$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Př. 4: Urči vektor $\boldsymbol{w}$ jestliže platí: $w_x = -3$ a $|\boldsymbol{w}| = 5$.

Musíme určit druhou souřadnici vektoru w_y.

$|\boldsymbol{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 5$

$\sqrt{(-3)^2 + w_y^2} = 5 \quad /^2$

$(-3)^2 + w_y^2 = 25$

$w_y^2 = 16$

$w_y^2 - 16 = 0$

$(w_y - 4)(w_y + 4) = 0$

$w_{y1} = 4 \qquad w_{y2} = -4$

$w = (-3; 4)$ nebo $w = (-3; -4)$

Násobení vektorů číslem začneme definicí.

Násobek nulového vektoru číslem *k* je nulový vektor.

Násobek nenulového vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$ číslem *k* je vektor $C - A$, přičemž *C* je bod, pro který platí:

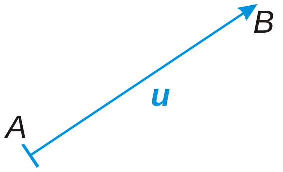
- $|AC| = |k||AB|$,
- je-li $k \geq 0$ leží bod *C* na polopřímce *AB*, je-li $k < 0$, leží bod *C* na polopřímce opačné k polopřímce *AB*.

Vektor $C - A$ označujeme symbolem $k\boldsymbol{u}$.

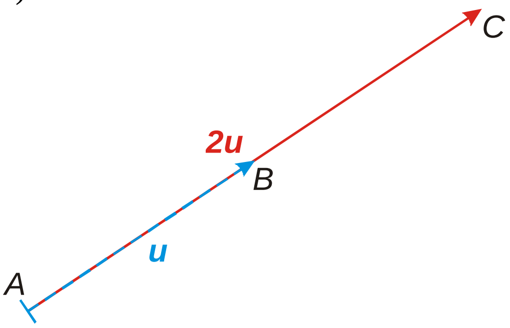
Dodatek: Definice násobení vektorů je velmi podobná definici stejnolehlosti $\Rightarrow$ bod C je stejnolehlý s bodem B ve stejnolehlosti $H(A;k)$.

Př. 5: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = B - A$. Sestroj graficky vektory.

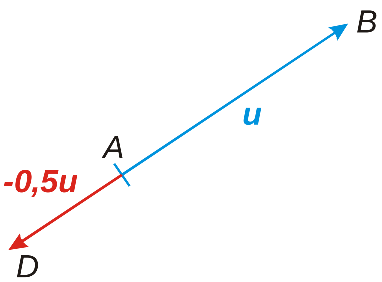
a) $2\boldsymbol{u} = C - A$ b) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} = D - A$



a) $2\boldsymbol{u} = C - A$



b) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} = D - A$



V pořádné matematické učebnici se ještě dokazuje, že výsledný vektor nezávisí na volbě umístění vektoru $\boldsymbol{u}$. Důkaz využívající posunutí přeskočíme.

Jaké budou souřadnice vektoru $k\boldsymbol{u}$?
Pomocí stejnolehlosti se dají odvodit věty:

Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ v rovině a pro každé reálné číslo k platí:
$k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2)$.
Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ v prostoru a pro každé reálné číslo k platí:
$k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$.

Př. 6: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (1; 2; -3)$. Urči souřadnice vektorů.

a) $2\boldsymbol{u}$ b) $-3\boldsymbol{u}$ c) $\sqrt{2} \cdot \boldsymbol{u}$

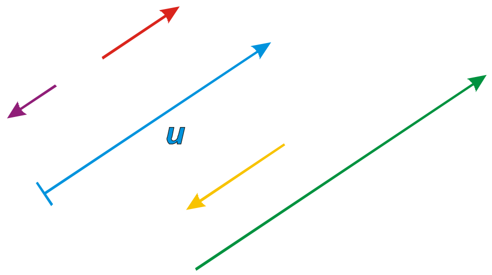
a) $2\boldsymbol{u} = 2(1; 2; -3) = (2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot [-3]) = (2; 4; -6)$

b) $-3\boldsymbol{u}=-3(1;2;-3)=(-3\cdot 1;-3\cdot 2;-3\cdot[-3])=(-3;-6;9)$

c) $\sqrt{2}\cdot\boldsymbol{u}=\sqrt{2}(1;2;-3)=(\sqrt{2}\cdot 1;\sqrt{2}\cdot 2;\sqrt{2}\cdot[-3])=(\sqrt{2};2\sqrt{2};-3\sqrt{2})$

Pedagogická poznámka: Stejně jako u sčítání doporučuji studentům psát zkrácený zápis takto: $2\boldsymbol{u}=2(1;2;-3)=(2;4;-6)$.

Př. 7: Nakresli libovolný vektor a několik jeho co nejrůznějších násobků. Co mají všechny nakreslené vektory společného?



Všechny vektory získané násobením vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou s vektorem $\boldsymbol{u}$ rovnoběžné (mají stejný nebo opačný směr).

Dva vektory jsou rovnoběžné (leží na stejné přímce), právě když je jeden násobkem druhého.

Př. 8: Rozhodni výpočtem (bez kreslení obrázků), které z následujících vektorů jsou rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{u}=(3;-2)$.

a) $\boldsymbol{a}=(2;-3)$ b) $\boldsymbol{b}=(6;4)$ c) $\boldsymbol{c}=(6;-4)$

d) $\boldsymbol{d}=(3\sqrt{2};-2\sqrt{2})$ e) $\boldsymbol{e}=(-6;9)$

a) $\boldsymbol{a}=(2;-3)\neq k(3;-2)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{a}$ není rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$.

b) $\boldsymbol{b}=(6;4)\neq k(3;-2)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{b}$ není rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$.

c) $\boldsymbol{c}=(6;-4)=2(3;-2)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{c}$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$.

d) $\boldsymbol{d}=(3\sqrt{2};-2\sqrt{2})=\sqrt{2}(3;-2)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{d}$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$.

e) $\boldsymbol{e}=(-6;9)=-3(2;-3)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{e}$ není rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s příkladem problémy, samozřejmě obrázky kreslíme. Nakreslíme si vektor, jeho složky, které pak v jednom případě vynásobíme stejnými čísly, v druhém různými a opět složíme.

Př. 9: Doplň větu s pravidly.
Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a každá dvě čísla k, l platí:
a) $0 \cdot \boldsymbol{u} =$ b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} =$ c) $k(l\boldsymbol{u}) =$
d) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) =$ e) $(k + l)\boldsymbol{u} =$

a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ c) $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$
d) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ e) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$

Platí pravidla, která známe z násobení reálných čísel $\Rightarrow$ při násobení vektorů budeme moci postupovat tak, jak jsme zvyklí.

Př. 10: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1;-3;1)$ a $\boldsymbol{v} = (2;2;-1)$. Urči vektor:
a) $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$, b) $\boldsymbol{z} = -2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$.

a) $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = 3(1;-3;1) + 2(2;2;-1) = ([3 \cdot 1 + 2 \cdot 2];[3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2];[3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)]) =$
$= (7;-5;1)$

b) $\boldsymbol{z} = -2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} = -2(1;-3;1) + 3(2;2;-1) =$
$= ([(-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2];[(-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 2];[(-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)]) = (4;12;-5)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Př. 11: Petáková:
strana 100/cvičení 18
strana 100/cvičení 19

Shrnutí: Násobením vektoru reálným číslem měníme jeho velikost (u záporných čísel i obracíme směr).